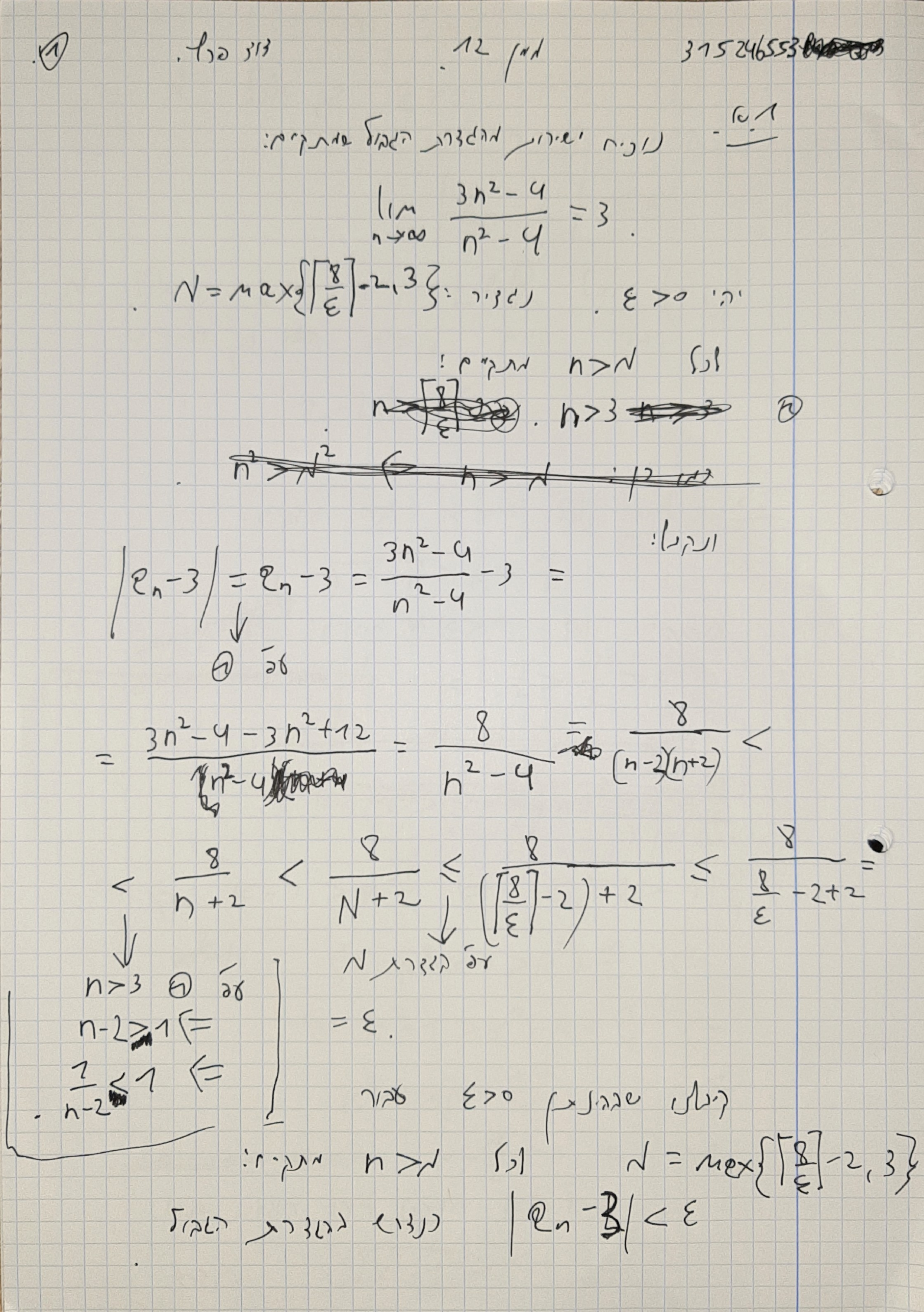


1. א. נוכיח ישירות מהגדרת הגבול שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-4}{n^2-4} = 3.$$

יהי $\varepsilon>0$. נגדיר: $N=\max\left\{\left\lceil \frac{8}{\varepsilon}\right\rceil -2, 3\right\}$.

ולכל $n>N$ מתקיים:

(*) $n>3$.

~~גם כן: $n>N \Rightarrow n^2>N^2$.~~

ונקבל:

$$|a_n-3| = a_n-3 = \frac{3n^2-4}{n^2-4}-3 =$$

(עפ״י (*))

$$= \frac{3n^2-4-3n^2+12}{n^2-4} = \frac{8}{n^2-4} = \frac{8}{(n-2)(n+2)} <$$

$$< \frac{8}{n+2} < \frac{8}{N+2} \le \frac{8}{\left(\left\lceil \frac{8}{\varepsilon}\right\rceil -2\right)+2} \le \frac{8}{\frac{8}{\varepsilon}-2+2} = \varepsilon.$$

(עפ״י הגדרת N)

עפ״י (*) $n>3$ ⇐ $n-2\ge 1$ ⇐ $\frac{1}{n-2}\le 1$.

קיבלנו שבהינתן $\varepsilon>0$ עבור $N=\max\left\{\left\lceil \frac{8}{\varepsilon}\right\rceil -2, 3\right\}$ ולכל $n>N$ מתקיים: $|a_n-3|<\varepsilon$ כנדרש בהגדרת הגבול.

מבחן 2ד.

ת.ב. (i) קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל N טבעי קיים $n>N$ כך שמתקיים:

$$|a_n - L| \geq \varepsilon.$$

(ii) לכל $L\in\mathbb{R}$ קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל N טבעי קיים $n>N$ כך שמתקיים:

$$|a_n - L| \geq \varepsilon.$$

ת.ג. למה: לכל $x\geq 2$ טבעי מתקיים:

$$\sqrt{x^2-1} > x-\frac{1}{2}$$

הוכחה: לכל $x>1$ טבעי מתקיים:

$$x-\frac{1}{2} > \frac{1}{2} > 0$$ ~~ולכן נעלה בשני האגפים~~

~~בריבוע ונקבל עם שימוש ד.3.ד:~~

~~$x^2-1 > \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = x^2-x+\frac{1}{4}$~~

כמו כן:

כן $\Leftarrow$ $x-1 > \frac{1}{4}$ $\Leftarrow$ $x\geq 2 > 1+\frac{1}{4}$

$\Leftarrow$ $x^2+x-1 > x^2+\frac{1}{4}$ $\Leftarrow$

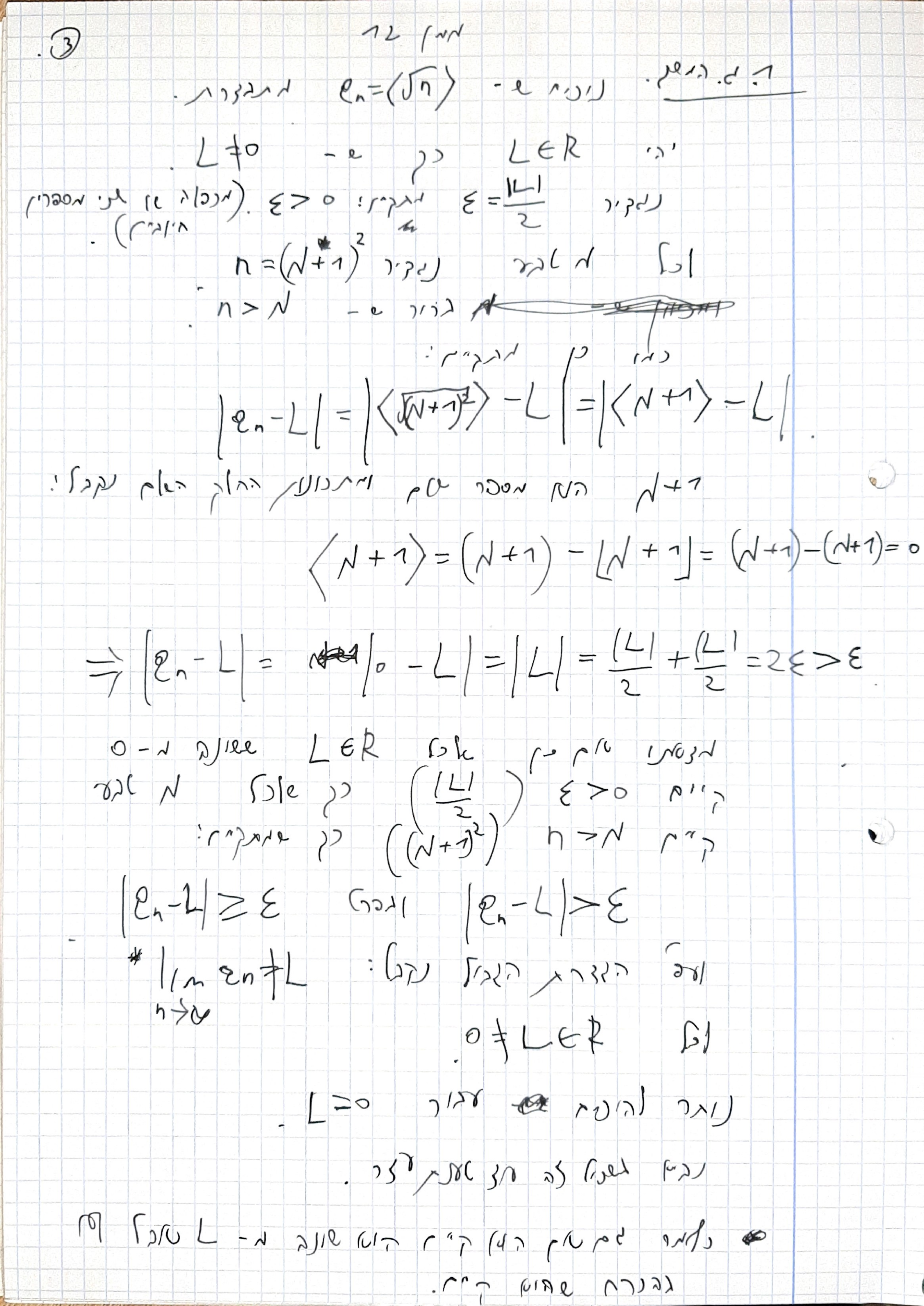
$\Leftarrow$ $x^2-1 > x^2-x+\frac{1}{4}$ $\Leftarrow$

$x^2-1 > \left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ $\Leftarrow$

ומכיוון ש $x-\frac{1}{2}>0$ ~~נוכל להוציא שורש:~~

וגם $x^2-1>0$ נוכל להוציא שורש:

$$\sqrt{x^2-1} > x-\frac{1}{2}$$ כנדרש.



(3).

ממן 12

ה.ג. השלילה: נניח ש- $e_n=\langle\sqrt{n}\rangle$ מתכנסת.

יהי $L\in\mathbb{R}$ כך ש- $L\neq 0$.

נבחר $\varepsilon=\frac{|L|}{2}$ מתקיים: $\varepsilon>0$. (מתכונה גם של מספרים חיוביים).

לכל N טבעי נבחר $n=(N+1)^2$

ברור ש- $n>N$.

כמו כן מתקיים:

$$|e_n-L|=\left|\langle\sqrt{(N+1)^2}\rangle-L\right|=|\langle N+1\rangle-L|.$$

$N+1$ הוא מספר שלם ומתכונות החלק השבור נקבל:

$$\langle N+1\rangle=(N+1)-\lfloor N+1\rfloor=(N+1)-(N+1)=0$$

$$\Rightarrow |e_n-L|=|0-L|=|L|=\frac{|L|}{2}+\frac{|L|}{2}=2\varepsilon>\varepsilon$$

מצאנו שלכל $L\in\mathbb{R}$ ששונה מ-0 קיים $\varepsilon>0$ $\left(\frac{|L|}{2}\right)$ כך שלכל N טבעי קיים $n>N$ $\left((N+1)^2\right)$ כך שמתקיים:

$|e_n-L|>\varepsilon$ ובפרט $|e_n-L|\geq\varepsilon$

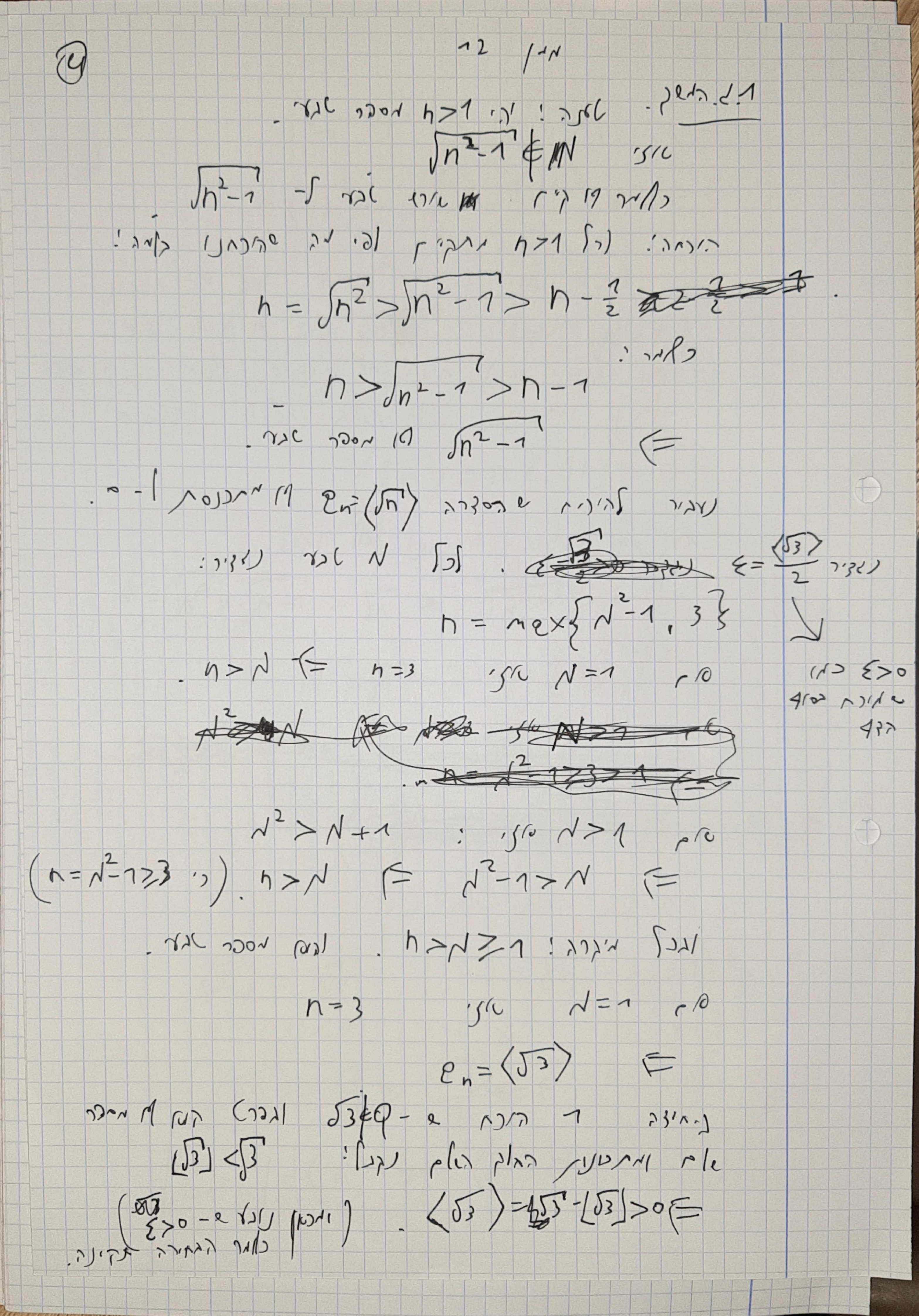
עפ"י הגדרת הגבול נקבל: $\lim_{n\to\infty} e_n\neq L$ *

וזה $0\neq L\in\mathbb{R}$.

נותר להוכיח עבור $L=0$.

נבחן בשלב זה תנאי עזר.

* כלומר אם הגבול קיים הוא שונה מ- L שטענו לכן בהכרח שהוא קיים.



ממן 12

1.ג. המשך. טענה: יהי $n>1$ מספר טבעי.

אזי $\sqrt{n^2-1}\notin\mathbb{N}$

כלומר לא קיים שורש טבעי ל-$\sqrt{n^2-1}$

הוכחה: לכל $n>1$ מתקיים לפי מה שהוכחנו בממ"ג:

$$n=\sqrt{n^2}>\sqrt{n^2-1}>n-\frac{1}{2}$$

כלומר:

$$n>\sqrt{n^2-1}>n-1$$

$\Leftarrow$ $\sqrt{n^2-1}$ לא מספר טבעי.

נעבור להוכיח שהסדרה $\langle\sqrt{n}\rangle_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת ל-0.

נגדיר $\varepsilon=\frac{\langle\sqrt{3}\rangle}{2}$. לכל N טבעי נגדיר:

$$n=\max\{N^2-1,3\}$$

אם $N=1$ אזי $n=3$ $\Leftarrow$ $N<n$.

אם $N>1$ אזי: $N^2>N+1$

$\Leftarrow$ $N^2-1>N$ $\Leftarrow$ $N<n$. (כי $n=N^2-1\geq 3$)

ובכל מקרה: $1\leq N<n$. וגם מספר טבעי.

אם $N=1$ אזי $n=3$

$\Leftarrow$ $a_n=\langle\sqrt{3}\rangle$

נזכיר כי הוכח ש- $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ ובפרט הוא לא מספר שלם ומתכונות החלק השלם נקבל: $\sqrt{3}>[\sqrt{3}]$

$\Leftarrow$ $0<\sqrt{3}-[\sqrt{3}]=\langle\sqrt{3}\rangle$. (ומכאן נקבל ש-$\varepsilon>0$ כאמור הגדרה תקינה.)

$\varepsilon>0$ כמו שמוכח בסוף הדף

(5)

מכאן נד.

ד.ג. השוב.

$\Leftarrow$ $|a_n - 0| = |a_n| = |\langle\sqrt{3}\rangle| =$

$= \langle\sqrt{3}\rangle = \frac{\langle\sqrt{3}\rangle}{2} + \frac{\langle\sqrt{3}\rangle}{2} = 2\varepsilon > \varepsilon$.

ניקח $N > 1$ טבעי, $n = N^2 - 1$ ולפי מה שהוכחנו ($N > 1$) נקבל: $\sqrt{n}$ הוא לא מספר שלם (טבעי גדול שהוא אינו על ההגדרה - ראשי הוא לא מספר שלם) ומתכונות החלק השלם נקבל: $\lfloor\sqrt{n}\rfloor < \sqrt{n}$

$\Leftarrow$ $\langle\sqrt{n}\rangle = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor > 0$

כמו כן מהלמה שהוכחנו נקבל:

$N - \frac{1}{2} < \sqrt{N^2 - 1} = \sqrt{n} < \sqrt{n+1} = \sqrt{N^2} = N$.

כלומר:

$N - 1 < (N-1) + \frac{1}{2} < \sqrt{n} < N$.

~~$\Leftarrow$ $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = N - 1$ ... $\langle\sqrt{n}\rangle$~~

~~$\Leftarrow$ $\langle\sqrt{n}\rangle = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor = \sqrt{n} - (N-1)$~~

ומתכונות החלק השלם נובע:

$\langle\sqrt{n}\rangle = \sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor = \sqrt{n} - (N-1) > \frac{1}{2}$

מהגדרה שלכל x מתקיים: $0 \le \langle x\rangle < 1$.

נקבל ש- $\langle\sqrt{n}\rangle > \frac{1}{2} > \frac{\langle\sqrt{3}\rangle}{2} = \varepsilon$.

כלומר:

$|a_n - L| = |\langle\sqrt{n}\rangle - 0| = \langle\sqrt{n}\rangle > \varepsilon$.

⑥

ה.ג. המשך.

~~[illegible]~~ נוכיח: עבור $L=0$ (מין) קיין סדר ε $\left(\frac{\langle\sqrt{3}\rangle}{2}\right)$

כך שלכל n גדול קיים $N>n$ $\left(\max\{n^2+1, 3\}\right)$

כך שמתקיים: $|a_n - L| \leq \varepsilon$. כנדרש.

ונסכם: הוכחנו בלשון N, ε שהסדרה $a_n = \langle \sqrt{n} \rangle$ מתכנסת.

⑦

מתן ת.ז.

2.א) צ"ל: $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-5n^5+9}{2n^4-4n^7-\pi} = 0$

הוכחה:

(נחלק את המונה והמכנה ב-n^7) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-5n^5+9}{2n^4-4n^7-\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n^4}-\frac{5}{n^2}+\frac{9}{n^7}}{\frac{2}{n^3}-4-\frac{\pi}{n^7}} =$ (אריתמטיקה של גבולות)

$= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}-\frac{5}{n^2}+\frac{9}{n^7}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^3}-4-\frac{\pi}{n^7}\right)} = \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}-\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{9}{n^7}}{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}-\lim_{n\to\infty}4-\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^7}} =$ * (אריתמטיקה של גבולות)

$= \frac{0-0+0}{0-4-0} = \frac{0}{-4} = 0$. כנדרש.

* הסדרה $(e_n)_{n=1}^{\infty} = \frac{2}{n^2}$ מתכנסת ל-0 כמכפלה של סדרה קבועה $(b_n)_{n=1}^{\infty} = 2$ בסדרה שמתכנסת $(c_n)_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{n^2}$

($(c_n)_{n=1}^{\infty} = \frac{1}{n^2}$ גם היא שואפת ל-0 עפ"י משפט הסנדוויץ' כי לכל n טבעי מתקיים: $0 \le \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{n}$ ושתי הסדרות החיצוניות שואפות ל-0).

וכנ"ל לגבי G ~~הסדרה~~ שאר הסדרות שמופיעות במונה ובמכנה. ~~[illegible]~~ (פרט למכנה לסדרה $(e_n)_{n=1}^{\infty} = 4$).

2.ב. נוכיח ש- $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-5n^5+9}{2n^4-4n^5-\pi} = \frac{5}{4}$.

נחלק מונה ומכנה ב- n^5 ונקבל:

(8)

[illegible]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-5n^5+9}{2n^4-4n^5-\pi}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}-5+\frac{9}{n^5}}{\frac{2}{n}-4-\frac{\pi}{n^5}}=$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2}-5+\frac{9}{n^5}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-4-\frac{\pi}{n^5}\right)}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}-\lim_{n\to\infty}5+\lim_{n\to\infty}\frac{9}{n^5}}{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim_{n\to\infty}4-\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^5}}=$$

$$=\frac{0-5+0}{0-4-0}=\frac{5}{4}.$$

גבול.

(9)

מיון 12

נפתור את הגבול:

$$\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}=\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}=\frac{4n}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}\right)}=$$

$$=\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}.$$

לכל $n>5$ עבור מתקיים: $\sqrt{n-2}<\sqrt{n+2}$ (הגבלה מוגדרת):

$$\frac{4\sqrt{n}}{2\sqrt{n+2}}<\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}}<\frac{4\sqrt{n}}{2\sqrt{n-2}} \Leftarrow (*)$$

~~הגבול של הביטוי הימני הוא:~~

~~$\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{2\sqrt{n-2}}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n-2}}$~~

כמו כן מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{n}}=1.$$

מכאן שעבור כל n טבעי $\frac{n}{n-2}$ מוגדר ומתקיים:

$$n>n-2>0 \Rightarrow \frac{n}{n-2}>1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{n}{n-2}}>\sqrt{1}=1.$$

כלומר עבור כל n מתקיים:

$$1<\sqrt{\frac{n}{n-2}}<\frac{n}{n-2}$$

מכאן שעפ"י הגבולות של הביטויים הימניים הם 1 ומשפט הסנדוויץ' נובע:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n-2}}=1$$

2.ג. המשך. ממשפט 2.2ב נובע: $1 = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n-2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n}}$

$$\Longleftarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n+2}{n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+2}}$$

כעת מכיוון ש- :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{n+2}{n}}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+2}{n}}} = \frac{1}{1} = 1$$

שוב נובע:

$$\lim \sqrt{\frac{n}{n+2}} = 1$$

ובמסקנה סופית, נובע: (אריתמטיקה של גבולות - כפל בקבוע)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{2\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{\frac{n}{n+2}} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{2\sqrt{n-2}} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{\frac{n}{n-2}} = 2.$$

ולכן ממשפט הסנדוויץ' ומהיות שוויון ⊛ שמתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n-2}} = 2$$

ממן 11 (דר)

3.2.

טענה 1: לכל $n\geq 5$ מתקיים: $n^2>2n+1$.

הוכחה: עבור $n=5$ נקבל: $25>11$ נכון. נניח נכונות עבור $n\geq 5$ כלשהו. אזי:

$$(n+1)^2=n^2+2n+1>2n+1+2n+1=4n+2.$$

(הנחת האינדוקציה)

כמו כן: $2n>3 \Leftarrow n\geq 2 \Leftarrow n>1$

$4n>2n+3=2(n+1)+1 \Leftarrow$ וסה"כ נקבל:

$$(n+1)^2>4n+2>2(n+1)+1$$

כנדרש.

מסקנה: (כמעט) לכל n מתקיים: $n^2>2n+1$.

טענה 2. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^n}=0$

הוכחה: עפ"י הטענה (1) כמעט לכל n מתקיים:

$$0<\frac{2n+1}{2^n}<\frac{n^2}{2^n}.$$

עפ"י מסקנה 2.49 מתקיים: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$

וממשפט הסנדוויץ' נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^n}=0$$

כנדרש.

ממן 12

2.5.2. המשך. נגדיר סדרה (c_n) בצורה הבאה:

$$c_n = \begin{cases} c_n=1 & n<5 \\ c_n=2^n-n^2 & n\geq 5 \end{cases}$$

טענה: לכל n $c_n>0$.

עבור $n<5$ זה מתקיים.

עבור $n=5$ נקבל: $c_5 = 32-25=7$

נניח נכונות עבור $n\geq 5$ (כלשהו) ונקבל עבור $n+1$:

~~$c_{n+1}=2^{n+1}-n^2-2n-1>2^{n+1}-n^2>2^n-n^2>$~~

$$c_{n+1}=2^{n+1}-(n+1)^2=2^{n+1}-n^2-2n-1>$$

$$>2^{n+1}-2n^2=2(2^n-n^2)=2c_n>0.$$

(עפ' שאלה 1 לכל $-n^2<-2n-1$ לכל $n\geq 5$.)

כנדרש.

קיבלנו שאיברי (c_n) חיוביים.

כמו כן לכל $n\geq 5$ מתקיים: (הביטוי מוגדר כי $c_n>0$)

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{2^{n+1}-n^2-2n-1}{2^n-n^2}=\frac{2-\frac{n^2}{2^n}-\frac{2n+1}{2^n}}{1-\frac{n^2}{2^n}}$$

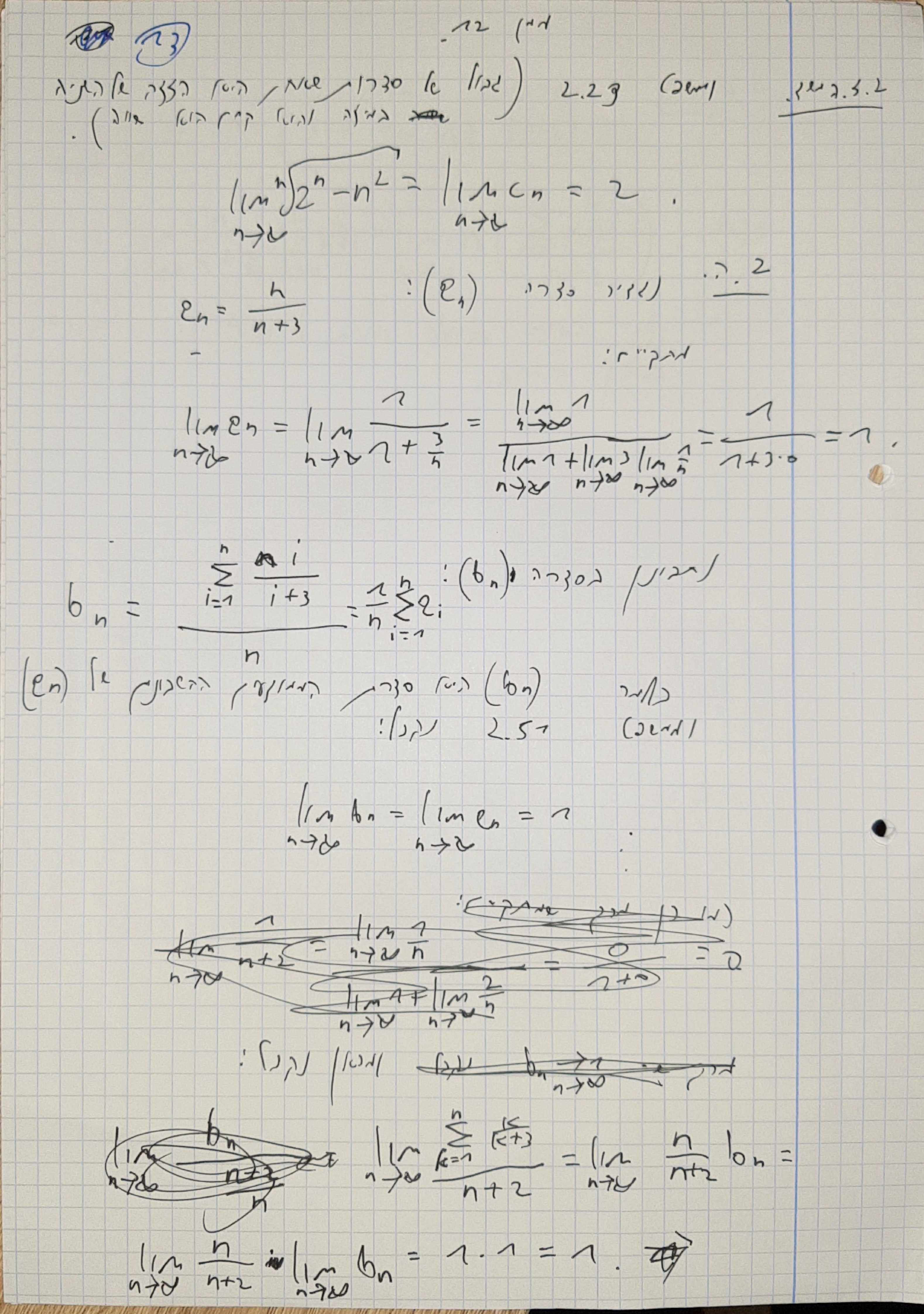
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}2-\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}-\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2^n}}{\lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}}=$$

(עפ' 2.29)

$$=\frac{2-0-0}{1-0}=2. \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=2$$

עפ' מסקנה 2.4.9 ושאלה 2 שהוכחתי בממ"ן

שאלה 5 ומכך ש- $c_n>0$



3 מ"ן בר.

ב.3.2 מגן

ומשפט 2.2 פ (גבול של סדרה שאינה, הינו הגבלה של הגבלה ~~...~~ בגבולה והינו קיים הינו אותו).

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n - n^2} = \lim_{n\to\infty} c_n = 2.$$

2. ה. נגדיר סדרה (e_n):

$$e_n = \frac{n}{n+3}$$

מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{3}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} 3 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+3\cdot 0} = 1.$$

נתבונן בסדרה (b_n):

$$b_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i+3}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i$$

כלומר (b_n) הינה סדרת הממוצעים החשבוניים של (e_n) וממשפט 2.5 נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} e_n = 1$$

~~(מ... מתקיים:)~~

~~$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = \frac{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0$$~~

~~ולכן $b_n \to 1$, $n\to\infty$~~ ומכאן נקבל:

~~$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n+2} \cdot n$$~~

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+3}}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2} \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = 1 \cdot 1 = 1.$$

(יד)

מאן 12.

2. ב. נימוק. ומאחר ולמנה יש גבול אינסופי
(אינסוף כפול מספר חיובי) ולפי 2.37 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+3} = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k+3}}{n+2}\right) = \infty.$$

כמו הסדרה שבשאלה שואפת לאינסוף ולכן היא מתכנסת
במובן הרחב.

(15)

ממ"ן 12.

3.א. נניח שממקום כל איברי (a_n) חיוביים.

כלומר: קיים N_1 טבעי כך שלכל $N_1<n$ מתקיים: $a_n>0$.

כמו כן עפ"י הנתון $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = 1$

כלומר קיים N_2 טבעי כך שלכל $N_2<n$ מתקיים: $|a_nb_n-1|<\frac{1}{2}$. (נבחר $\varepsilon=\frac{1}{2}$).

או בניסוח אחר: $\frac{1}{2}<a_nb_n<\frac{3}{2}$.

נגדיר: $N=\max\{N_1,N_2\}$

ולכל $N<n$ מתקיים:

(א) $a_n>0$. (ב) $\frac{1}{2}<a_nb_n$

$\Leftarrow$ $0<\frac{1}{2a_n}<b_n$.

$\Leftarrow$ כלומר כל איברי b_n חיוביים.

מסקנה: הטענה נכונה.

3.ב. לא נכון. דוגמה נגדית:

$$(a_n)=\begin{cases} a_n=\frac{1}{2} & n \text{ זוגי} \\ a_n=1 & n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

$$(b_n)=\begin{cases} b_n=2 & n \text{ זוגי} \\ b_n=1 & n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

כלומר:

$$(a_n)=\left(1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},\dots\right)$$

$$(b_n)=(1,2,1,2,1,2,\dots)$$

טז

המשך 2ד.

כמו כן לכל n זוגי: $a_nb_n = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

ולכל n אי-זוגי: $a_nb_n = 1\cdot 1 = 1$

כלומר לכל n:

$$a_nb_n = 1.$$

עפ"י משפט ג.ד.2. $\lim_{n\to\infty} a_nb_n = 1$

כמו כן שתי הסדרות חיוביות. ולכן הן עונות על דרישות המשפט. נניח בשלילה שהן לא מתכנסות.

נוכיח ש-(a_n) לא מתכנסת:

נניח ש-(a_n) מתכנסת לגבול L. ($L\in\mathbb{R}$)

~~אזי עפ"י ההגדרה לכל ε~~

נבחר $\varepsilon = \frac{1}{8}$, עפ"י ההגדרה קיים N כך שלכל $N<n$ מתקיים:

$$|a_n - L| < \frac{1}{8}.$$

כלומר: לכל $N<n_1$ כך ש-n_1 זוגי מתקיים:

$|a_{n_1} - L| < \frac{1}{8}$. $a_{n_1} = \frac{1}{2}$.

ולכל $N<n_2$ אי-זוגי מתקיים:

$|a_{n_2} - L| < \frac{1}{8}$. $a_{n_2} = 1$.

ומאי-שוויון המשולש נקבל:

$$\frac{1}{2} = \left|-\frac{1}{2}\right| = |a_{n_1} - a_{n_2}| = |(a_{n_1} - L) + (L - a_{n_2})| \le |a_{n_1} - L| + |L - a_{n_2}| =$$

$$= |a_{n_1} - L| + |a_{n_2} - L| = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

כלומר ההנחה ש- (a_n) מתכנסת הובילה למסקנה $\frac{1}{2} < \frac{1}{4} \le \frac{1}{2}$ וזו סתירה. בהכרח ש- (a_n) לא מתכנסת.

עבור (b_n): בקיצור: נבחר $\varepsilon = \frac{1}{8}$ ובאותה הדרך נקבל:

$$1 \le \frac{1}{4}$$ וזו סתירה.

מסקנה: שתי הסדרות לא מתכנסות.

ג. <u>הטענה נכונה</u>.

<u>הוכחה</u>: $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ומשפטי חשבון של גבולות אינסופיים נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0.$$

כמו כן על פי הנתון: $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$.

ובנוסף נקבל:

$$a_n = a_n b_n \frac{1}{b_n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n b_n \frac{1}{b_n} = \lim_{n\to\infty} (a_n b_n) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} =$$

$$= 1 \cdot 0 = 0.$$

מתן בדה

(18)

3.3 הטענה לא נכונה.

דוגמה נגדית:

נגדיר (a_n) הסדרה המוגדרת לכל n טבעי: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

ונגדיר (b_n) מוגדרת: $b_n = (-1)^n n$.

הסדרה a_n מתכנסת ל-0 כמכפלה של סדרה חסומה וסדרה אפסה. הסדרה b_n לא מתכנסת גם לא במובן הרחב (שאלה 3ג).

כמו כן: לכל n:

$$a_n b_n = \frac{(-1)^n}{n}(-1)^n n = (-1)^{2n} = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$$

כלומר קיבלנו שתי סדרות שעונות על דרישות הטענה כך שמתקיים: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ וגם b_n לא מתכנסת. ובפרט לא מתקיים: $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ($\lim b_n$ לא מוגדר).

3.ד. הטענה נכונה.

נתון (a_n) חיובית שלא בהכרח כמעט לכל n

a_n חיובי וזה מופיע בהוכחה של סעיף ט'

בשאלה הנ"ל.

3.ו. נכון. לכל n טבעי מתקיים:

(13) סימן 22.

$$b_n = a_n b_n \frac{1}{a_n}$$

לפי הנתון: $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1 > 0$

כמו כן: $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ וגם $a_n > 0$ לכל n.

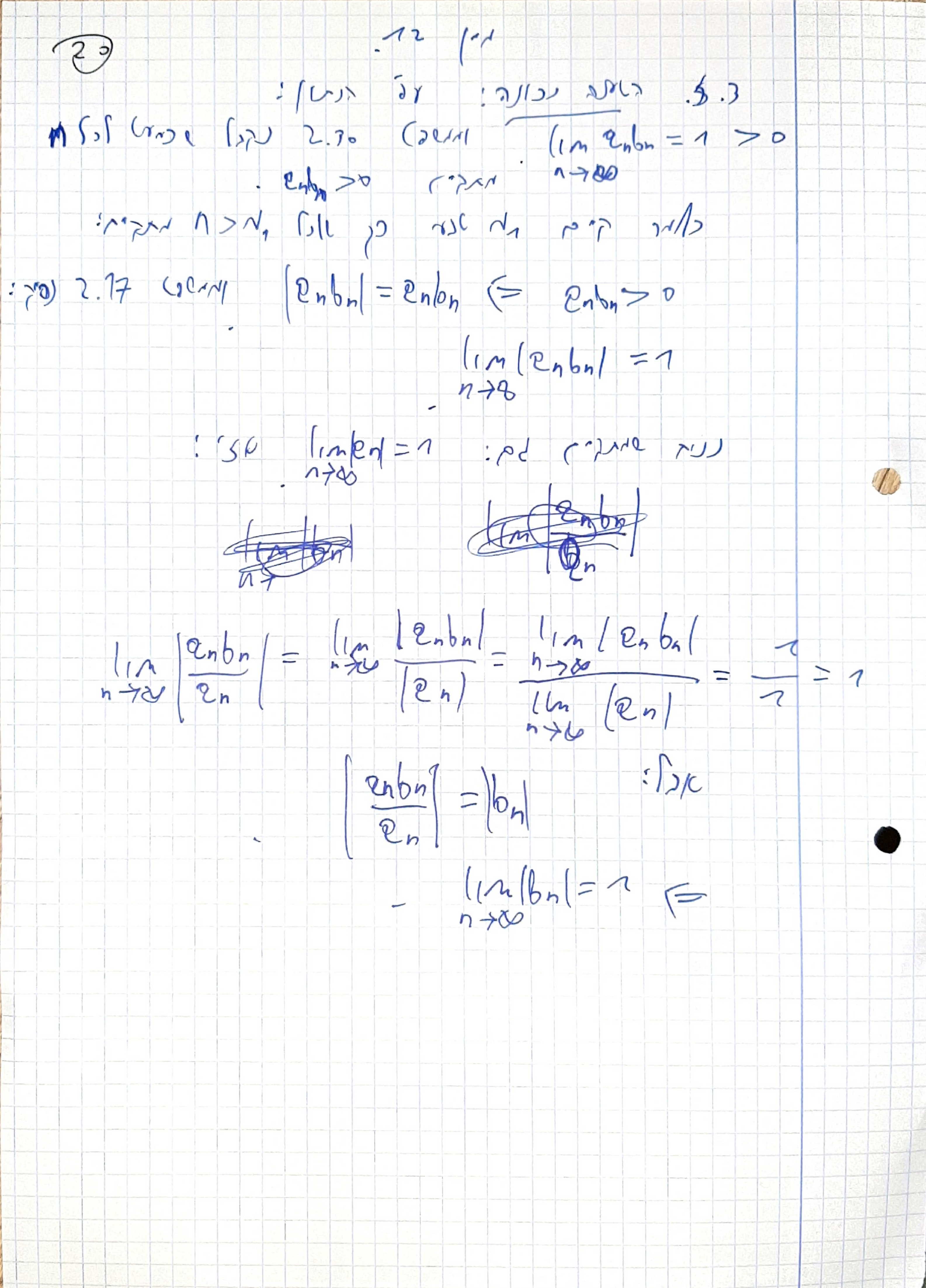
לפי הכלל $1/0^+$ באריתמטיקה של גבולות שמתבדרים נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$$

ומהכלל ע״ש $\infty \cdot$ מספר חיובי נקבל:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n b_n \frac{1}{a_n} = \infty$$ ✓

מסקנה: הטענה נכונה.



כב

ממן 12.

3.ב. הטענה נכונה: עם הנימוק:

$\lim_{n\to\infty} a_nb_n = 1 > 0$ ומשפט 2.30 נקבל שכמעט לכל n מתקיים $a_nb_n > 0$.

כלומר קיים N טבעי כך שלכל $n > N$ מתקיים:

$a_nb_n > 0 \Rightarrow |a_nb_n| = a_nb_n$ ומשפט 2.17 (ס״ק):

$$\lim_{n\to\infty} |a_nb_n| = 1$$

נניח שמתקיים גם: $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 1$ אזי:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_nb_n}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_nb_n|}{|a_n|} = \frac{\lim_{n\to\infty}|a_nb_n|}{\lim_{n\to\infty}|a_n|} = \frac{1}{1} = 1$$

אבל:

$$\left|\frac{a_nb_n}{a_n}\right| = |b_n|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}|b_n| = 1$$